10/1/20

Πινακες $m \times n$ → πρόσθεση $M(m \times n, \mathbb{R})$ δ.χ διαστασης $m \times n$

→ πολ/μου όταν $m \times n \; n \times k = m \times k$

rank$A$ # γραμ. ανεξ. γραμμών A = # γραμ. ανεξ. στηλών του A

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί - Στοιχειώδεις πίνακες

1) $E_{i,j}$ εναλλαγή γραμμών - στηλών

2) $M_i(a)$ πολ/μός γραμμής - στήλης με a

3) $A_{i,j}(a)$ Πρόσθεση πολ/σιου της j γραμμής - στήλης στην i

Για γραμμοπράξεις πολ/με από αριστερά
στηλοπράξεις δεξιά

$$\underbrace{PAQ}_{\text{αντιστρέψιμοι}} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A $n \times n$ τετραγωνικός

$\exists A^{-1}$;;;

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \text{rank}A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\nexists A^{-1} \Leftrightarrow \text{rank}A < n \Leftrightarrow \det A = 0$

Εύρεση του A^{-1} → γραμμοπράξεις μαζί με τον ταυτοτικό

→ με τις ορίζουσες

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ ως προς στήλη $= \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} a_{t,1} \det(A_{t,1})$

n

$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

Ιδιότητες $\det A$

1) A άνω-κάτω τριγωνικός $\Rightarrow \det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$
2) Εναλλαγή δυο γραμμών-στηλών η ορίζουσα πολ/ται με -1
3) Πολ/ζοντας μια γραμμή-στήλη με a η ορίζουσα πολ/ται με a
4) Αν προσθέσουμε πολ/σιο μιας γραμμής-στήλης σε άλλη η ορίζουσα δεν αλλάζει.

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$
$\det(A+B) \neq \det A + \det B$
$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$\det A^t = \det A$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)}$$

Διανυσματικοί χώροι (Σώματα $\mathbb{Q}$ μικρότερο άπειρο, $\mathbb{C}$ μεγαλύτερο)

Διανυσματικοί χώροι $\leftrightarrow$ Βάση (δεν είναι μοναδική) = $\rightarrow$ γεννά τον χώρο, $\rightarrow$ γραμ. ανεξ.

γεννά χώρο $\Leftrightarrow$ κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται μοναδικά σαν γραμ. ανεξ. συνδυασμός των στοιχείων της συγκεκριμένης βάσης

$\dim V$ = πλήθος των στοιχείων της βάσης

$W \leq V$ υπόχωρος

1) $u+v \in W$
2) $au \in W$

$\}$ αν ισχύουν οι ιδιότητες έχω υπόχωρο

$W_1 + W_2 = \{u+v \mid u \in W_1, v \in W_2\}$

$W_1 + W_2 \leq V$

$\dim(W_1+W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$ ευθύ άθροισμα

$W_1 \leq V \Rightarrow \exists\ W_1'$ συμπλήρωμα

$W_1 \oplus W_1' = V$

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

$T: V^n \to W^m$

$T(au+bv) = aT(u) + bT(v)$

$\ker T = \{u \in V$ ώστε $T(u) = \bar{0}\} \leq V$

$\operatorname{Im} T = \{T(u)\ \forall u \in V\} \leq W$

$\ker T = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow T$ είναι 1-1 μονομορφισμός

$\ker T = W \Leftrightarrow T$ είναι επί επιμορφισμός

T 1-1 και επί $\Leftrightarrow T$ είναι ισομορφισμός $\cong$

Αν $\dim V = \dim W \Leftrightarrow \exists$ ισομορφισμός $T: V \to W$

Οι διαν. χώροι πεπερασμένης διάστασης χαρακτηρίζονται $\mathbb{R}^n$ $n \geq 0$

$\mathbb{R}^n$ $n \geq 0$ $\forall\ T: V^n \to W^m$ και συγκεκριμένες βάσεις S και S' ορίζεται ο πίνακας (T, S, S') της T ως προς S και S'

Υπάρχουν οι πίνακες αλλαγής βάσης : I ταυτοτική $: \underset{\langle S \rangle}{\mathbb{R}^n} \to \underset{\langle S' \rangle}{\mathbb{R}^n}$

Ορίζεται ο πίνακας αλλαγής βάσης : $S = (v_1, \dots, v_n)$

$S' = (w_1, \dots, w_n)$

Τότε η j στήλη του πίνακα (λ, S, S') είναι οι συντελεστές του V_j ως προς τη βάση S'

$v_j = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{nj} w_n$

Αν επιλέξουμε κατάλληλες βάσεις S και S' ο πίνακας μιας $T: V^n \to W^m$ μπορεί να πάρει μορφή $\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r = \text{rank}(\text{πίνακα της } T) = \dim \text{Im} T$

$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im} T.$

$M(m\times n, \mathbb{R})$ δ.χ $\dim M(m\times n, \mathbb{R}) = m\cdot n$

$\mathcal{L}(V^n, W^m) = \{ T: V^n \to W^m \text{ γραμμική} \}$ όλες οι γραμ. απεικ.

$(T + T')(u) = T(u) + T'(u)$

$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow (aT)(u) = a\cdot T(u)$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $\mathcal{L}(V, W)$ γίνεται δ.χ

$\varphi : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M(m\times n, \mathbb{R})$

Η φ ορίζεται όταν καθορίσουμε συγκεκριμένες βάσεις S και S' για τους V και W

$\varphi(T) = (T, S, S')$

Η φ είναι γραμμική

$\varphi(T+T') = (T+T', S, S') = (T, S, S') + (T', S, S')$

$\varphi(aT) = (aT, S, S') = a(T, S, S')$

Η φ είναι 1-1 και επί

φ 1-1 $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{0 \text{ μηδενική απεικόνιση } V \to W\}$

Η φ είναι επί $\Leftrightarrow \forall A \in M(m\times m, \mathbb{R})$ ορίζεται μια γραμ. απεικόνιση

$A: V^n \to W^m$

Αν είχαμε $V^n = \mathbb{R}^n$ και $W^m = \mathbb{R}^m$

$A: V^n \to W^m$ $\quad S = (v_1, \ldots, v_n)$

$v \to A(v)$ $\quad S' = (w_1, \ldots, w_m)$

$v = a_1 \cdot v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$

$A(v) = ;;;$

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \oplus \quad A(v) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_m w_m$$

Το ίδιο κάναμε και για τυχαίους V και W

Βάση $\mathcal{L}(V, W)$. Ορίζαμε τις γραμμ. απεικονίσεις T_{ij} για $i = 1, \ldots, n$ κ' $j = 1, \ldots, m$

$T_{ij}: V^n \to W^m$

$$T_{i,j}(v_t) = \begin{cases} w_j & \text{όταν } i = t \\ \bar{0} & \text{όταν } i \neq t \end{cases}$$

Αυτές οι απεικονίσεις οι οποίες είναι γρ. ανεξ. Αποτελούν βάση για τον $\mathcal{L}(V, W)$

$A_{m \times n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ κανονικές βάσεις

Σύμφωνα με $\oplus$ $\quad A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \right)^t_{m \times 1}$ γραμμική

$A = (a_{ij})$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Το στοιχείο $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ ανήκει στην εικόνα της A ;;

Αυτό είναι ισοδύναμο ότι

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right) \text{σύστημα } (**)$$

Δηλαδή το $(b_1, b_m) \in ImA \Leftrightarrow \exists (d_1 \; d_n) \in \mathbb{R}^n$ ώστε η εικόνα του να είναι το $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} d_1 \\ \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ Το σύστημα είναι συμβιβαστό $\Leftrightarrow$ έχει λύση

Αν το σύστημα έχει λύση δηλαδή υπάρχει το (d_1, d_n) τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n &= b_1 \\ a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + \quad + a_{2n}d_n &= b_2 \quad \Leftrightarrow \\ &\vdots \\ a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \quad + a_{mn}d_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix} d_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \\ a_{m2} \end{pmatrix} d_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \\ a_{mn} \end{pmatrix} d_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Δηλαδή η στήλη των σταθερών όρων b είναι γρ. συνδυασμός των στηλών του A.

Θεώρημα

Το γραμμικό σύστημα (++) έχει λύση $\Leftrightarrow$ η στήλη b των σταθερών όρων είναι γρ. συνδυασμός των στηλών του A των συντελεστών του συστήματος. Το σύστημα (++) ορίζει τον πίνακα A και τον επαυξημένο (A,b). Το (++) έχει λύση $\Leftrightarrow$ rank(A,b) = rank A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο ομογενές

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (+++) \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Πρόταση

Το αντίστοιχο ομογενές (+++) έχει λύση μη τετριμμένη $\Leftrightarrow$
$\ker A \neq \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \dim \ker A \geq 1 \Leftrightarrow n - \operatorname{rank} A \geq 1 \Leftrightarrow n-1 \geq \operatorname{rank} A$

π.χ

$x_1+x_2=0$ $2x_1+2x_2=0$	$x_1+x_2=1$ αδύνατο $2x_1+2x_2=1$	$x_1+x_2=1$ άπειρες $2x_1+2x_2=2$ λύσεις

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι το σύστημα $Ax=b$ (+) έχει μια λύση την $(d_1,\ldots,d_n)$. Αν $(c_1,\ldots,c_n)$ είναι οποιαδήποτε λύση του ομογενούς $Ax=\bar{0}$ (+++) τότε το άθροισμα $(d_1,\ldots,d_n)+(c_1,\ldots,c_n)=(d_1+c_1,\ldots,d_n+c_n)$ είναι επίσης λύση του αρχικού $Ax=b$ και κάθε λύση του κανονικού δίνεται με αυτόν τον τρόπο. Άρα αν το ομογενές έχει μόνο την τετριμμένη, τότε το κανονικό έχει μοναδική. Δηλαδή ο χώρος των λύσεων του κανονικού $Ax=b$ είναι το σύμπλοκο
$(d_1,\ldots d_n) + \ker A$

Δίνεται $Ax=b$

1η ερώτηση: Έχει λύση;

- Ναι αν $rank(A,b) = rank A$
- Όχι όταν $rank(A,b) \neq rank A$

→ Βρες μία $(d_1, \dots, d_n)$ και τον $Ker A$. Τότε τις έχεις βρει όλες

Ειδικές περιπτώσεις $n=m$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & b_1 \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Λύση $\Leftrightarrow rank A = rank(A,b)$

Αν $\exists A^{-1} \Rightarrow n = rank A = rank(A,b)$

$\dim Ker A = n - rank A = 0$

Ομογενές μοναδική

Και το αρχικό έχει μοναδική.

Το $n \times n$ σύστημα $Ax=b$ με $\det A \neq 0$ καλείται σύστημα Cramer και οι λύσεις δίνονται από.

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

$$x_i = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n,i-1} & b_n & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

αντικαθιστούμε την i στήλη του A με το b.

π.χ Να υπολογισθεί ο χώρος των λύσεων του

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z + t &= 0 \\ x \quad\quad + z - t &= 0 \\ 3x - 3y + 5z \quad\quad &= 0 \\ 4x - 3y + 6z - t &= 0 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$\ker A = \{ \dots \}$ $\qquad \dim \ker A = 4 - \operatorname{rank} A$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rank} A &= 2 \\ \dim \ker A &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} x + z - t &= 0 \\ y - \tfrac{2}{3} z - t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= t - z \\ y &= t + \tfrac{2}{3} z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ker A &= \{ (t - z, t + \tfrac{2}{3} z, z, t) \} \\ &= \{ (t, t, 0, t) + (-z, \tfrac{2}{3} z, z, 0) \} \\ &= \langle (1, 1, 0, 1), (-1, \tfrac{2}{3}, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

π.χ Να διερευνηθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές των a και b (πότε έχει μοναδική λύση / καμία λύση ή άπειρες λύσεις)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + ay + bz &= 2 \\ x + a^2 y + b^2 z &= 4 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Αν $a=b=1$ $\quad x+y+z=1$

$x+y+z=2$

rank A ; rank(A, b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 2 \\ 1 & a^2 & b^2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & b^2-1 & 3 \end{pmatrix}$$

$a=1 \quad b\neq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & b^2-1 & 3 \end{pmatrix}$$

$b=-1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ rank $A = 2 \neq 3 = $ rank(A, b)

Για $a=1$ και $b=1,-1$ όχι λύση

Για $a=1$ και $b\neq 1,-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-(b+1) \end{pmatrix}$$

rank $A=2$ διότι $b\neq 1$

Αν $3-(b+1)\neq 0$ τότε

rank$(A,b)=3$ $\quad b\neq 2$

$a=1 \quad b\neq 2$ τότε δεν έχει λύση

$a\neq 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & b^2-1 & 3 \end{pmatrix}$

$a=-1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & b^2-1 & 3 \end{pmatrix}$

Αν $b^2-1=0 \Rightarrow b=\pm 1$ τότε $\operatorname{rank} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rank}(A,b)$

$a=-1$ και $b=\pm 1 \Rightarrow$ όχι λύση

$a=-1$ και $b\neq \pm 1 \Rightarrow$ έχει λύση

$a \neq 1, -1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & b^2-1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & b^2-1-(a+1)(b-1) & 3-(a+1) \end{pmatrix}$

Αν $b^2-1-(a+1)b+a+1 \neq 0$ έχουμε μοναδική λύση διότι $\operatorname{rank} A = 3$
Ενώ προηγουμένως όταν είχαμε λύση $\operatorname{rank} A = 2$ άρα άπειρες

$b^2-(a+1)b+a$

$a^2+2a+1-4a=(a-1)^2$ $\qquad b=\dfrac{a+1\pm(a-1)}{2} \to a, \; \to 1$

Για $b\neq a$ $b \neq 1$ $a \neq 1, -1$ τότε
έχουμε μοναδική λύση

$a=b$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a^2-1 & 3 \end{pmatrix}$

$a \neq \mp 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-(a+1) \end{pmatrix}$

Αν $2-a \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ δεν έχουμε λύση
Για $a=b=2$ έχουμε άπειρες